R značí racionální funkci dvou proměnných. Integrál tvaru $\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,\mathrm{d}x$, kde $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, převedeme na integrál z racionální funkce subsitucí $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

- $\frac{x+1}{x-1} > 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$ $\Rightarrow$ na nich hledáme prim. fci

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

- definujeme $\varphi(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ pro $t \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\varphi'(t) = \frac{2t(t^2-1) - (t^2+1)2t}{(t^2-1)^2} = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}$$

- $\varphi'(t) < 0$ pro $t \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
- $\varphi((0, 1)) = (-\infty, -1)$ a $\varphi((1, +\infty)) = (1, +\infty)$
- podle druhé věty o substituci (věta VIII.14)

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} \cdot t \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = (*)$$

- rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{-2}{t^2+1} + \frac{1}{t+1} + \frac{-1}{t-1}$$

$$(*) = \int \frac{-2}{t^2+1} + \frac{1}{t+1} + \frac{-1}{t-1}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \log|t+1| - \log|t-1| - 2\operatorname{arctg} t$$

  na $(0, 1)$ a $(1, +\infty)$.

- výsledek:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

  na $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$.